Міністерство освіти і науки України

Донбаська державна машинобудівна академія

О. Г. Ровенська, С. О. Колесников

ВИБРАНІ ПИТАННЯ КУРСУ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Навчальний посібник
для студентів спеціальності «Системний аналіз»

Затверджено
на засіданні вченої ради
Протокол № 2 від 5.10.2017

Краматорськ
ДДМА
2017

УДК 517
ББК 22.161.1
Р 58

Рецензенты:

Власенко К.В., д. п. н., проф. професор кафедри вищої математики Донбаської державної машинобудівної академії;
Чумак О.О., к. п. н., доцент кафедри інженерної підготовки Донбаської національної академії будівництва і архітектури.

Навчальний посібник містить у стислому вигляді огляд теорії систем диференціальних рівнянь, теорії стійкості, питань пошуку і дослідження особливих розв'язків і особливих точок звичайних диференціальних рівнянь, елементи операційного числення. Вказана тематика, наведені зразки розв'язання практичних завдань і завдань дослідницького характеру.

Ровенська, О. Г.
Р 58 Вибрані питання курсу диференціальні рівняння : навч. посіб. для студентів спеціальності «Системний аналіз» / О. Г. Ровенська, С. О. Колесников. – Краматорськ : ДДМА, 2017. – 51 с.
ISBN 978-966-379-808-0

УДК 517.
ББК 22.161.1

ISBN

ЗМІСТ

ВСТУП

У посібнику розглянуто деякі основні питання якісної теорії диференціальних рівнянь, а саме питання пошуку та дослідження особливих точок і розв'язків звичайних диференціальних рівнянь і систем диференціальних рівнянь, елементи теорії стійкості таких розв'язків та методи застосування операційного числення до розв'язання диференціальних рівнянь і систем. Подано теоретичний матеріал із вказаної тематики, розглянуто задачі практичного змісту. Істотну увагу приділено поняттю асимптотичної стійкості диференціальних рівнянь та систем диференціальних рівнянь.

Курс спирається на загальновідомі факти математичного аналізу та на стандартні відомості з теорії звичайних диференціальних рівнянь. Опанування розглянутих тем надає можливість для вивчення і розуміння більш спеціальних питань математичної теорії керування.

1 ЗАГАЛЬНІ УЯВЛЕННЯ ПРО ЯКІСНІ МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ МОДЕЛЕЙ

При моделюванні явищ навколишнього світу за допомогою диференціальних рівнянь відповідь на поставлені питання намагаються дістати після інтегрування рівнянь. Проте зробити це вдається не завжди. Не завжди допомагають і наближені методи. Тоді можуть бути корисними якісні методи дослідження диференціальних рівнянь, які дають змогу мати необхідну інформацію, виходячи з властивостей останніх і не вдаючись до інтегрування їх.

1.1 Фазова площина й фазова траєкторія процесу

Нехай процес, який досліджуємо, можна описати нормальною системою диференціальних рівнянь

$$\frac{dX}{dt} = X(x,y),\ \frac{dY}{dt} = Y(x,y), \tag{1.1}$$

розв’язки яких $x\ \ t$, $y\ \ t$ дають параметричні рівняння деякої кривої, яку називають *фазовою траєкторією* на площині (X, Y), що при цьому називають *фазовою площиною.* Сукупність фазових траєкторій утворює так званий *фаховий портрет* даного процесу, який дає змогу мати уявлення про якісні особливості даного процесу. Щоб дістати диференціальне рівняння фазових траєкторій, поділимо друге рівняння з (1.1) на перше:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\mathrm{Y(x,\ y)}}{\mathrm{X(x,\ y)}} = F(x,y) \tag{1.2}$$

Згідно теореми Коші, у разі неперервності функцій F і F' в області D через довільну точку $M \in$ проходить єдина фазова траєкторія. Це не стосується особливих точок $M_0(x_0, y_0)$, де

$$Y(x_0, y_0) = X(x_0, y_0) = 0.$$

Рівняння (1.2) вже не виражає залежності між dx і dy.

Якщо лінеаризувати систему (1.1) за допомогою формули Тейлора, то дістанемо систему лінійних рівнянь зі сталими коефіцієнтами, розв'язки характеристичного рівняння якої

$$\Delta = \begin{vmatrix} \left.\dfrac{\partial X}{\partial x}\right|_0 - k & \dfrac{\partial X}{\partial y} \\ \dfrac{\partial Y}{\partial x} & \left.\dfrac{\partial Y}{\partial y}\right|_0 - k \end{vmatrix} =) .$$

дають змогу зробити висновок, з якою особливістю маємо справу в тому чи іншому випадку.

Можливі випадки:

I. Якщо k_1 і k_2 – дійсні і мають однакові знаки, то M_0 – *вузол.* При $k_1 \leq)$, $k_2 \leq)$ маємо стійке положення рівноваги (фазові траєкторії виходять з точки M_0).

II. Якщо k_1 і k_2 – дійсні і мають протилежні знаки, то M_0 – *сідло,* яке є нестійким положенням рівноваги.

III. Якщо $k_{1,2} = \chi \pm 3$ – комплексні і спряжені, то M_0 – *фокус,* стійкій при $\alpha <$ і нестійкий при $\alpha >$.

IV. Якщо $k_{1,2} = \pm$ тобто числа уявні, то M_0 – *центр.*

Прикдад 1.1 Розглянемо фазовий портрет малих коливань математичного маятника, які описує рівняння $x' + \omega \; :=)$.

Розв'язання.

Це рівняння замінимо нормальною системою рівнянь

$$y = \frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt} + \omega \; :=) .$$

Вилучаючи dt, дістанемо рівняння фазових траєкторій

$$ydy + \quad = \quad .$$

Інтегруючи його, маємо

$$y^2 + \omega \;{}^2 = C^2.$$

Це сім`я еліпсів, які утворюють фазовий портрет даного процесу. Змінюючи масштаб уздовж осі $x(\tilde{x} = \omega$ , дістанемо сім`ю кіл, яким відповідають гармонічні коливання. Справді, якщо

$$x = x \;\mathrm{in}\, \omega t = x \;\mathrm{in}\, \tau ,$$

то

$$y = \alpha \cos \tau = c',$$
$$x^2 + y^2 = x \;\mathrm{os}\, \tau = x \;.$$

Помічаємо, що замкнені фазові траєкторії відповідають періодичним коливанням.

1.2 Механічне тлумачення фазової траєкторії

Застосуємо наведені міркування до рівнянь механічного руху матеріальної точки масою m під дією сили $f(x)$, яке має вигляд:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + f(x) = 0.$$

Замінимо це рівняння нормальною системою

$$y = \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} = -f(x)/m.$$

Вилучимо з неї dt. Дістанемо рівняння фазових траєкторій

$$\frac{dy}{dx} = -f(x)/my.$$

Інтегруючи його в межах від x_0 до x, знаходимо

$$\frac{1}{2}my^2 - \frac{1}{2}my_0^2 = -\int_{x_0}^{x} f(x)dx = \int_0^{x_0} f(x)dx - \int_0^{x} f(x)dx$$

або

$$\frac{1}{2}my^2 + \int_0^{x} f(x)dx = \frac{1}{2}my_0^2 + \int_0^{x_0} f(x)dx = E = const .$$

Оскільки

$$y = \frac{dx}{dt} = v,$$

то

$$\frac{1}{2}my^2 = \frac{1}{2}mv^2$$

– кінетична енергія системи. Можна показати, що

$$V(x) = \int_0^{x} f(x)dx$$

– її потенційна енергія. Таким чином, рівняння фазових траєкторій у скінченній формі виражає закон збереження механічної енергії

$$\frac{1}{2}my^2 + V(x) = E = const ,$$

звідки

$$y = \pm\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}. \tag{1.3}$$

У багатьох випадках $V(x)$ можна записати безпосередньо, не переходячи навіть до диференціального рівняння, завдяки чому за допомогою формули (1.3) можна побудувати фазовий портрет відповідного процесу і вивчити його особливості.

1.3 Дослідження руху математичного маятника

Розглянемо рівняння руху математичного маятника

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega \quad \sin x = 0,$$

але не будемо використовувати наближену рівність $\sin x \approx$, а перейдемо до еквівалентної нормальної системи

$$\frac{dx}{dt}= \qquad , \quad \frac{dy}{dt}=- \qquad .$$

Дістанемо рівняння фазових траєкторій

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\omega \quad \sin x}{y}, \tag{1.4}$$

Інтегруючи, маємо

$$0{,}5y^2+\omega \quad 1-\cos x)=E.$$

Звідки

$$y=\pm\sqrt{2\left|E-2\omega \quad \sin^2\frac{x}{2}\right|}.$$

Згідно з (1.4) особливі точки заданого рівняння – це точки (0,0), ($\pm \pi$,0), ($\pm 2\pi$,0),… , причому в точках $x_0 = \pi$, де k набуває парних значень, маємо центр, а в решті точок – сідло.

Значення енергії E повністю визначає характер руху маятника.

Якщо $0 \le E \le 2\omega$, то маємо замкнені фазові траєкторії, які відповідають періодичним коливанням маятника. Чим менше значення *E,*тим траєкторія ближча до кола, а коливання – до гармонічних. При $E \ge 2\omega$ траєкторія стає незамкненою. Ці дві області розділяє так звана сепаратриса (штрихова лінія), для якої $E = 2\omega$ (рис. 1.1).

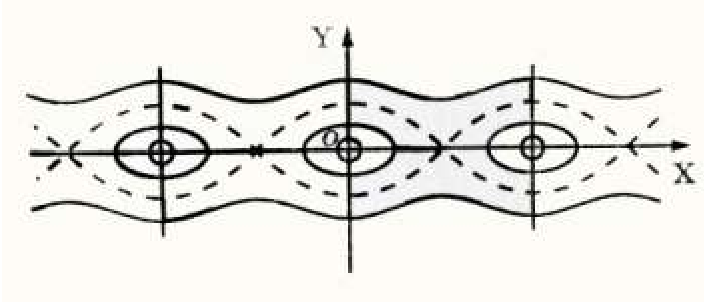

Рисунок 1.1

Цікаво, що незамкнені фазові траєкторії відповідають обертанню математичного маятника, для чого справді необхідний великий запас енергії , щоб відцентрова сила P, компенсуючи дію сили тяжіння G, відхиляла нитку на сталий кут α (рис. 1.2).

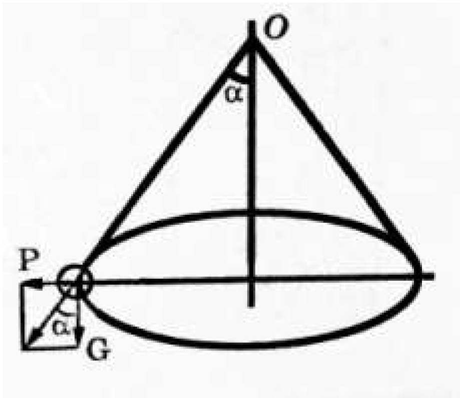

Рисунок 1.2

2 ОСОБЛИВІ ТОЧКИ, ОСОБЛИВІ РОЗВ’ЯЗКИ

2.1 Особливі точки диференціальних рівнянь першого порядку.

Для диференціальних рівнянь першого порядку існують точки, через які проходить більше, ніж одна, або жодної інтегральної кривої. Такі точки називаються особливими. Вони можуть бути ізольованими або заповнювати цілі лінії, які також називаються особливими. Дамо математичне означення.

Нехай задане рівняння

$$y' = \qquad .$$

Якщо функція $f(x,y)$ задовольняє усім умовам теореми Коші в кожній точці деякої області за винятком деякої точки (x_0, y_0), то така точка називається особливою.

Через кожну точку області, крім особливої, проходить єдина інтегральна крива. Через особливу точку може проходити дві інтегральні криві, нескінченна кількість або жодної.

Нехай, наприклад,

$$f(x,y) = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)},$$

де $P(x,y)$ і $Q(x,y)$ – неперервні функції. Тоді рівняння набирає вигляду

$$y' = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}.$$

Якщо існує точка (x_0, y_0), де $P(x_0, y_0) = \qquad = \;$, то в ній рівняння вже не зв’язує між собою диференціали dx і dy, внаслідок чого особливі точки вже не описуються цим рівняння. Щоб знайти такі точки, застосуємо систему

$$\begin{cases} \qquad = \\ \qquad = \end{cases}$$

Існує чотири типи особливих точок: вузол, сідло, центр і фокус. У першому четвертому випадках через особливу точку проходить нескінченна множина інтегральних кривих, у другому – дві, в третьому – жодної.

Наприклад, для рівняння вигляду

$$y' = \frac{}{Cx +}$$

така умова виконується у точці $(0;0)$. Розглянемо приклади.

Приклад 2.1 Знайти особливі точки диференціального рівняння

$$y' = \frac{}{x}.$$

Розв’язання.

$$\frac{dy}{y} = \frac{}{x},$$

$$\ln|y| = \quad + \quad,$$

$$y = \quad.$$

Загальний розв’язок $y =$ задає сім’ю парабол з вершиною на початку координат (рис. 1.1).

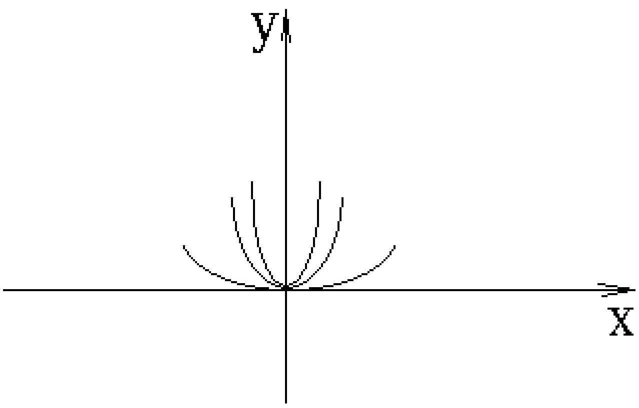

Рисунок 2.1

Особливі точки також можна знайти розв’язавши систему

$$\begin{cases} \\ \end{cases}$$

Через початок координат проходять усі інтегральні криві. Така точка називається вузол.

Приклад 2.2 Знайти особливі точки диференціального рівняння

$$y' = \frac{\quad}{x}.$$

Розв'язання.

$$\frac{dy}{y} = \frac{\quad}{x},$$

$$\ln|y| = - \quad + \quad,$$

$$y = \frac{C}{x}.$$

Загальний розв'язок цього рівняння визначає сім'ю гіпербол (рис. 1.2).

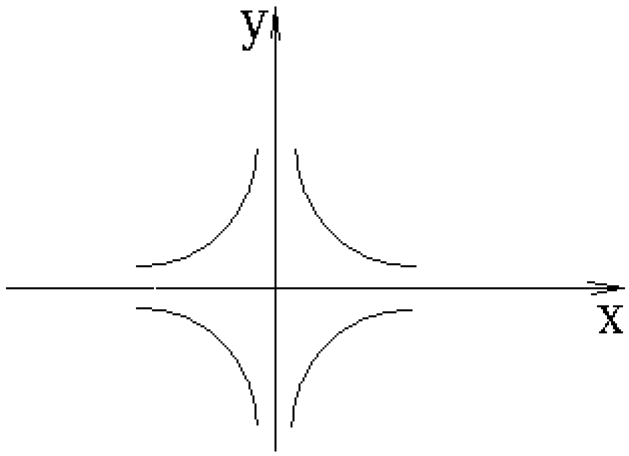

Рисунок 2.2

Крім того, дві інтегральні криві співпадають з Ox та Oy. Така особлива точка називається сідлом. Її також можна знайти із системи

$$\begin{cases} \\ \end{cases}.$$

Приклад 2.3 Знайти особливі точки диференціального рівняння

$$y' = \frac{\quad}{y} \quad .$$

Розв'язання.

$$ydy = - \quad ,$$
$$\frac{y^2}{2} = - \frac{\ ^2}{2} + \quad ,$$
$$y^2 + \quad = \quad .$$

Загальний розв'язок цього рівняння визначає сім'ю кіл з центром на початку координат (рис. 2.3).

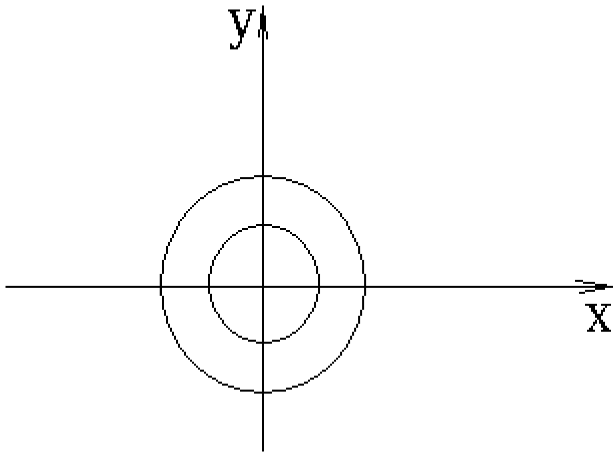

Рисунок 2.3

Приклад 2.4 Знайти особливі точки диференціального рівняння

$$y' = \frac{\quad}{x - \quad} \quad .$$

Розв'язання.

Рівняння є однорідним, виконаємо заміну змінних $y = \quad$, $y' = \quad + \quad$. Маємо

$$\frac{1 - \quad}{1 + \quad} \quad = - \frac{\quad}{x} \; .$$

Звідки знаходимо

$$arctg\frac{y}{x} - \frac{1}{2} \quad + x^{2} \quad + \quad = \quad ,$$

$$\sqrt{x^2 + \quad} = \quad .$$

У полярній системі координат лінія має вигляд:

$$r = \quad .$$

Це сім’я логарифмічних спіралей. Точка (0;0) є особливою точкою, через яку проходить нескінченна кількість інтегральних ліній (фокус) (рис. 2.4).

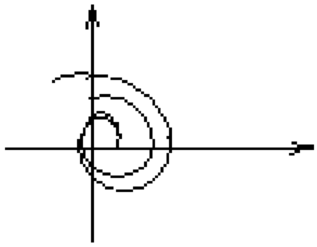

Рисунок 2.4

2.2. Особливі розв’язки диференціального рівняння першого порядку. Обвідні.

Розв’язки, які не можна отримати із загального називаються особливими розв’язками диференціального рівняння.

З геометричної точки зору графіком особливого розв’язку є обвідна для сім’ї частинних розв’язків, яка у кожній точці дотикається до будь-якої лінії сім’ї, що визначається в загальному випадку неявною функцією

$$F(x,y,c)=0 .$$

Дотична до обвідної збігається з дотичною до графіка частинного розв’язку.

Для знаходження рівняння обвідної розглянемо довільну її точку x;y , яка одночасно є і точкою одного із графіків деякої лінії з сім’ї. Цій лінії (частинному розв’язку) відповідає деяке значення параметра C, яке при даних x та y визначається з рівняння $C =$. Тобто для рівняння обвідної виконується

$$F(x,y,C(x,y))=0.$$

Визначимо кутовий коефіцієнт дотичної до обвідної в точці $x;y$, продиференціювавши останню рівність, вважаючи, що $y=$:

$$\frac{\partial}{\partial} + \frac{\partial}{\partial} \quad + \frac{\partial}{\partial} \quad + \frac{\partial}{\partial}\frac{\partial}{\partial} \quad -$$

Кутовий коефіцієнт дотичної до лінії сім'ї знайдемо з рівності

$$\frac{\partial}{\partial} + \frac{\partial}{\partial} \quad .$$

Звідки

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial}{\partial}}{\frac{\partial}{\partial}}.$$

Отже, для того ,щоб виконувалась остання рівність, необхідно щоб $\frac{\partial}{\partial}=0$. З останнього рівняння можна знайти C як функцію x та y.

Таким чином, для заходження обвідної маємо систему

$$\begin{cases} \quad x,y))=0 \\ \partial \quad - \end{cases}$$

Приклад 2.5 Знайти особливий розв'язок рівняння

$$y^2\ 2+ \qquad .$$

Розв'язання.

$$1+ \qquad = \frac{p^2}{y^2},$$

$$y' = \sqrt{\frac{R^2}{y^2}} - = \sqrt{\frac{R^2}{y}} - ,$$

$$\frac{\partial \cdot}{\sqrt{R^2 -}} = \partial \; .$$

Відокремлюємо змінні і інтегруємо

$$\int - = + ,$$

$$-\frac{1}{2} \cdot - = + ,$$

$$R^2 - = + ,$$

$$x + + .$$

Отримали загальний інтеграл, який визначає сім'ю кіл радіуса R з центром на осі абсцис. Маємо

$$F(x,y,C) = + + - ,$$

$$\frac{\partial}{\partial} - + = ,$$

$$x = .$$

Звідки

$$y = \pm \; .$$

Графіком обвідної є дві прямі, паралельні осі абсцис (рис. 2.5).

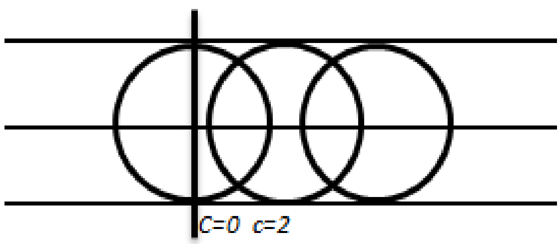

Рисунок 2.5

3 ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ СТІЙКОСТІ

3.1 Поняття стійкості та асимптотичної стійкості

Розв'язок більшості диференціальних рівнянь та систем не виражається через квадратури або елементарні функції і при їх розв'язанні використовують наближені методи. Недоліком є те що ці методи дають тільки один частинний розв'язок і щоб отримати інший частинний розв'язок увесь процес потрібно виконувати заново. Якщо ми знаємо один частинний розв'язок не можна зробити висновок про характер інших розв'язків.

У багатьох задачах техніки і механіки буває важливо знати не конкретне значення розв'язку при конкретному значенні аргументу, а характер поведінки розв'язку при зміні аргументу. Наприклад, потрібно знати чи є розв'язок, який задовольняє початковим умовам, періодичним, чи можливо його наблизити деякою відомою функцією. Цими питаннями займається якісна теорія диференціальних рівнянь. Одним із основних питань якісної теорії диференціальних рівнянь є питання про стійкість розв'язку (руху). Ці дослідження було розпочато Ляпуновим А. М. (1857-1918).

Нехай задана система диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \quad) \\ \quad) \end{cases} \tag{3.1}$$

Нехай $x =$, $y =$ – частинний розв'язок системи, що задовольняє початковим умовам

$$x(t_0) = \ , \ y(t_0) = \ . \tag{3.2}$$

Нехай $\overline{x} =$ і $\overline{y} =$ – частинний розв'язок системи, що задовольняє початковим умовам

$$\overline{x}(t_0) = \ , \ \overline{y}(t_0) = \ \ldots \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \tag{3.3}$$

Розв'язок $x =$ та $y =$ системи (3.1) який задовольняє умовам (3.2) називається стійким за Ляпуновим за умови $t \to$, якщо для кожного $\varepsilon >$ існує $\delta >$, таке що

$$\left|\overline{x}(t) - \right| < \ , \ \left|\overline{y}(t) - \right| < \tag{3.4}$$

за умов

$$|\bar{x}_0 - \quad| < \quad, |\bar{y}_0 - \quad| < \quad, \forall > \quad.$$

Якщо хоча б одна з умов (3.4) не виконується, розв’язок є нестійким.

Це означає, що при малих змінах початкових умов відповідні розв’язки також мало змінюються. Тобто характер руху мало відрізняється при малих змінах початкових даних.

В даний час існує багато видозмін поняття стійкості, розглянемо одне з них, зазначене вже самим Ляпуновим.

Розв’язок системи $x(t)$, y(t) називається асимптотично стійким, якщо крім умов (3.4) виконуються умови

$$\lim_{t\to\infty} x\ t - \quad = \quad, \lim_{t\to\infty} v\ t - \quad = \quad \qquad \text{…………….(3.5)}$$

З означення випливає, що якщо система асимптотично стійка, то вона стійка.

Надалі будемо розглядати питання стійкості тривіального розв’язку

$$\begin{cases} \quad \equiv \\ \quad , \end{cases}$$

системи (3.1). Інші випадки можуть бути зведені до цього за допомогою паралельного переносу системи координат.

3.2 Стійкість лінійних однорідних систем диференціальних рівнянь

Розглянемо критерії стійкості та асимптотичної стійкості певних типів систем диференціальних рівнянь.

Система, яка визначає рух (аргумент t це час) називається автономною, якщо вона має вигляд

$$\begin{cases} \\ \end{cases}$$

$$x(t_0) = \quad, y(t_0) = \quad,$$

тобто t у явному вигляді відсутнє.

Точка спокою (особлива точка) цієї системи знаходиться з умови

$$\begin{cases} \quad) = \\ \quad) = \end{cases}$$

Дослідимо питання, яким умовам має задовольняти a, b, c і d щоб розв'язок був стійким.

Розглянемо систему

$$\begin{cases} \\ \end{cases}$$

Точка $0;0$ – її точка спокою. Дослідимо питання, яким умовам мають задовольняти a, b, c і d щоб розв'язок був стійким та асимптотично стійким.

$$y = \frac{\quad'}{b};$$

$$x'' = \quad + \quad + \quad ,$$

$$x'' = \quad + \quad + \quad - \quad ,$$

$$x'' = \quad + \quad + \quad - \quad ,$$

$$x'' - \quad + \quad + \quad - \quad = \quad .$$

Характеристичне рівняння має вигляд

$$k^2 - \quad + \quad + \quad - \quad = \quad ,$$

Зауважимо, що характерне рівняння також можна записати у такому вигляді

$$\begin{vmatrix} a - & \\ c & d - \end{vmatrix} = \quad .$$

Можливі випадки:

1. Розв'язки характеристичного рівняння k_1, k_2 – дійсні і різні, тобто $k_1 \neq$. Тоді

$$x\ t = \quad + \quad ,$$

$$y\ t = \quad + \quad .$$

а) $k_1 <\ $, $k_2 <\ $. Виконуються умови

$$\lim_{t\to\infty}\left|x\ \ v\ \right| = \ ,\ \lim_{t\to\infty}\left|v\ \ t\ \right| = \ .$$

Отже умови (2.4) і (2.5) виконано, тобто $0;0$ - асимптотично стійкий розв’язок (стійкий вузол).

б) $k_1, \mathrm{k}_2 >\ $. Для будь-якого $\delta >\ $ можна підібрати $\varepsilon >\ $ таке, що умови (2.4) не виконуються. Отже $0;0$ – нестійкий розв’язок (нестійкий вузол).

в) $k_1 \cdot\ \ <\ $. Точка $0;0$ – нестійка (сідло).

г) $k_1 =\ $, $k_2 >\ $ (або $k_2 =\ , k_1 >\ $). Тоді

$$x\ \ t\ = \ \ + \ \ .$$

Отже $0;0$ – нестійка точка.

д) $k_1 =\ , k_2 <\ $ (або $k_1 =\ , k_1 <\ $). Точка $0;0$ – стійка. Виконується умова (2. 4), але не асимптотично стійка, оскільки (2.5) не виконується.

2. Розв’язки характеристичного рівняння комплексні, спряжені $k_1 =\ \ +\ $, $k_2 =\ \ -\ $ $\beta \neq\ $. Тоді

$$x\ \ t\ = \ \ \ \ +\ \ $$

а) $\alpha <\ $, точка $0;0$ – асимптотично стійка (фокус).

б) $\alpha =\ $, точка $0;0$ – стійка, але не асимптотично стійка (центр).

в) $\alpha >\ $, Точка $0;0$ – не стійка (фокус).

ІІІ Розв’язки характеристичного рівняння k_1, k_2 – дійсні і рівні, тобто $k_1 =\ $. Тоді

$$x\ \ t\ = \ \ + \cdot\ \ .$$

а) $k_1 =\ \ >\ $, точка $0;0$ – не стійка (вузол).

б) $k_1 =\ \ <\ $, точка $0;0$ – стійка та асимптотично стійка (вузол).

в) $k_1 =\ \ =\ $, точка $0;0$ – не стійка.

Розглянемо однорідну систему з n лінійних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами

$$y_i' = \sum_{j=} \qquad , \; i = \qquad .$$

Характеристичне рівняння цієї системи має вигляд

$$\begin{vmatrix} a_{11} - & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} - \end{vmatrix} = \; .$$

Можливі випадки:

1. Якщо дійсні частини усіх розв'язки в характеристичного рівняння від'ємні, то точка спокою $y_i \; t \; \equiv \;, \; i =$ асимптотично стійка.

2. Якщо дійсна частина хоча б одного розв'язку характерного рівняння додатня, то точка спокою $y_i \; t \; \equiv \;, \; i =$ є нестійкою.

3. Якщо розв'язки це прості числа з дійсною частиною, яка дорівнює 0 (тобто нульові розв'язки, або чисто уявні), то точка спокою $y_i \; t \; \equiv \;$, $i =$ стійка, але не асимптотично стійка.

Приклад 3.1 Встановити характер точки спокою системи

$$\begin{cases} \\ \\ \end{cases}$$

Розв'язання. Запишемо характеристичне рівняння системи

$$\begin{vmatrix} 1 - & - \\ 2 & 3 - \end{vmatrix} ,$$

$$1 - \quad - \quad + \quad = \; ,$$

$$k^2 - \quad + \quad = \; ,$$

$$k_1 = \; - \;, \; k_2 = \; + \; .$$

Тоді

$$x \; t \; = \qquad + $$

Отже точка $0;0$ – не стійка.

Приклад 3.2 Встановити характер точки спокою рівняння

$$y''' + \quad + \quad = \; .$$

Розв’язання. Запишемо характеристичне рівняння

$$k^2 + \quad + \quad = \quad ,$$
$$k_{1,2} = - \quad .$$

Тоді

$$y \;\; t \; = \qquad + $$

Отже, розв’язок $y \;\; t \; \equiv$ – асимптотично стійкий.

Приклад 3.3 Встановити характер точки спокою рівняння

$$y''' + \quad + \quad + \quad = \quad .$$

Розв’язання. Запишемо характеристичне рівняння

$$k^3 + \quad + \quad + \quad = \quad ,$$
$$k^2 + \quad \cdot \quad + \quad = \quad ,$$
$$k_1 = - \quad , \; k_{2,3} = \pm \quad .$$

Тоді точка спокою стійка, не асимптотично стійка.

Приклад 3.4 Встановити характер точки спокою системи

$$\begin{cases} \qquad - \\ \qquad - \\ \qquad \end{cases}$$

Розв’язання. Запишемо характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} - \; - & & 1 \\ 0 & - \; - & - \\ 0 & 1 & - \; - \end{vmatrix} = \quad .$$

Точка спокою асимптотично стійка.

3.3 Стійкість неоднорідних систем

Теорема. Система лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами

$$x_i' = \sum_{j=} \qquad , \; i = \qquad ,$$

стійка (або асимптотично стійка) одночасно з відповідною однорідною системою.

Зауваження 1. Якщо система має вигляд (не є лінійною)

$$x_i' = \qquad x_{2,} \ldots, x_n \;, \; i = \; ,2,\ldots,n \;,$$

то функції $f_1, f_2, \ldots, f_n$ можна розвинути у степеневі ряди за допомогою формули Тейлора і, якщо обмежитись лінійною частиною, то отримаємо лінійну неоднорідну систему вигляду

$$x_i' = \sum_{j=} \qquad , \; i =$$

яку називають системою першого наближення для вихідної системи. Цей метод можна застосовувати, але з урахуванням вигляду функцій φ_i ,

$i =$, а саме:

1. Якщо всі корені характеристичного рівняння системи мають від'ємні дійсні частини, то тривіальний розв'язок нелінійної системи є асимптотично стійким (тобто можливе дослідження на стійкість по першому наближенню).

2. Якщо хоча б один з коренів характеристичного рівняння має додатну дійсну частини, то тривіальний розв'язок нелінійної системи є нестійким (тобто і в цьому випадку можливе дослідження на стійкість по першому наближенню).

3. Якщо всі корені характеристичного рівняння мають недодатні дійсні частини, причому хоча б один з коренів має нульову дійсну частину, то дослідження за допомогою системи першого наближення неможливе.

Зауваження 2. Якщо неоднорідна система диференціальних рівнянь має вигляд

$$\begin{cases} \; = \quad + \quad + \\ \qquad\qquad + \end{cases} \qquad ,$$

то вона одночасно стійка або нестійка разом з системою

$$\left\{ \begin{array}{l} \\ \end{array} \right.$$

якщо такі умови мають місце

$$\lim_{\rho\to} \frac{P\ \ x, y}{\rho} = \quad \lim_{\rho\to} \frac{R\ \ x, y}{\rho} = \qquad ,$$

$$\rho = \sqrt{\quad + \quad} .$$

Завдання для самостійної роботи.

1. Запишіть характеристичне рівняння і знайдіть його корені. Дослідіть на стійкість тривіальний розв'язок лінійного однорідного рівняння. Визначте характер розв'язку, якщо він стійкий.

а) $y' + 4y' + 4y' = 0$;
б) $y' - 2y' + 4y' - 3y = 0$;
в) $y^{IV} + 3y' + \ 1y' + 27y' + \ 8y = 0$.

2. Дослідіть на асимптотичну стійкість тривіальний розв'язок диференційного рівняння за допомогою критерію Рауса – Гурвіца.

а) $8y' + 5y' + 7y' + 5y = 0$;
б) $3y' + 5y' + 5y' + \ 1y = 0$;
в) $4y' + 5y' + 3y' - 5y = 0$.

3. Встановіть характер точки спокою $x = 0$, $y = 0$ системи

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}\ y, \\ \dfrac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}\ y, \end{cases} ,$$

якщо

а) $a_{11} = -\ $, $a_{12} = -\ $, $a_{21} = 4$, $a_{22} = -\ $;
б) $a_{11} = 2$, $a_{12} = 3$, $a_{21} = 3$, $a_{22} = 2$;
в) $a_{11} = -\ $, $a_{12} = 0$, $a_{21} = \ $, $a_{22} = -\ $.

4 Дослідіть на стійкість розв'язки системи диференційних рівнянь. Визначте характер стійкості.

$$\begin{cases} x' = -x + z, \\ y' = -2y - z, \\ z' = y - z. \end{cases}$$

5. Знайдіть, при яких значеннях параметра a розв'язки системи стійкі та асимптотично стійкі.

$$\begin{cases} x' = \alpha \ \ + 5y, \\ y' = -x + 2y. \end{cases}$$

6. Знайдіть, при яких значеннях параметрів α та β розв'язки системи асимптотично стійкі чи стійкі? Виконайте графічне зображення розв'язку на площині α, β .

$$\begin{cases} x' = -k\ x + \dfrac{1}{\alpha}\ y, \\ y' = \beta\ x - k\ y. \end{cases}$$

Відповіді:

1. а) Розв'язок стійкий; б) характеристичне рівняння має множник $\lambda + 1$, розв'язок нестійкий; в) характеристичне рівняння має множник $(\lambda + \ )$, розв'язок асимптотично стійкий.

2. а) Тривіальний розв'язок асимптотично стійкий; б) тривіальний розв'язок нестійкий; в) тривіальний розв'язок нестійкий.

3. а) Розв'язок системи асимптотично стійкий; б) розв'язок системи нестійкий; в) розв'язок системи стійкий.

4. Характеристичне рівняння має корінь $\lambda = -$, розв'язок асимптотично стійкий.

5. Якщо $a = -$ та $a = -\ .5$ розв'язки стійки; якщо $-2{,}5 < \alpha \ \ 2$ розв'язки асимптотично стійки.

6. Розв'язки асимптотично стійки при $k > \ ), \beta < \ ^2 \alpha$; розв'язки стійки при $k = \ ), \beta\alpha \ \ )$ та $k > \ ), \beta = \ ^2\alpha$.

Індивідуальні вправи.

1. Запишіть характеристичне рівняння і знайдіть його корені (у варіантах 1–16 рівняння має множник $\lambda + \ \lambda - \ $; у варіантах 17–30 рівняння

має множник λ + ł). Дослідіть на стійкість тривіальний розв'язок диференційного рівняння (якщо розв'язок стійкий, встановіть характер стійкості).

1. y◂‾+ ły′ + ′y′ + ˌy′+ !y =).
2. y◂‾+ !y′ + y′ − !y′ − !y =).
3. y◂‾+ ˌy′ + 0y′ + 0y′+ ły =).
4. y◂‾+ y′ − !y′ − ˌy′ − ły =).
5. y◂‾+ ˌy′ + 3y′ + 4y′+ ˌy =).
6. y◂‾− ˌy′ − 0y′ − ˌy =).
7. y◂‾+ ′y′ + 6y′ + 8y′+ ˌy =).
8. y◂‾− y′ − ˌy′ − 4y′ − ˌy =).
9. y◂‾+ ˌy′ + 9y′ + !2y′+ 0y =).
10. y◂‾− !y′ − 1y′ − 8y′ − 0y =).
11. y◂‾+)y′ + !2y′ + !6y′+ 2y =)..
12. y◂‾− ˌy′ − 4y′ − !2y′ − 2y =).
13. y◂‾+ 0y′ + !5y′ + ˌ0y′+ 4y =).
14. y◂‾− ły′ − 7y′ − !6y′ − 4y =).
15. y◂‾+ 1y′ + !8y′ + ˌ4y′+ 6y =).
16. y◂‾− ˌy′ − !0y′ − ˌ0y′ − 6y =).
17. y◂‾+ !y′ + ˌy′ + ˌy′+ ły =).
18. y◂‾+ ˌy′ − ły =).
19. y◂‾+ ˌy′ + ˌy′ + 2y′+ ˌy =).
20. y◂‾− y′ + !y′ − ły − ˌy =).
21. y◂‾+ ły′ + ′y′ + 6y′+ 2y =).
22. y◂‾− !y′ + y′ − ˌy′ − 2y =).
23. y◂‾+ ˌy′ + ˌy′ + !0y′+ 6y =).
24. y◂‾− ˌy′ − 2y′ − 6y =).
25. y◂‾+ ˌy′ +)y′ + !4y′+ !0y =).
26. y◂‾− ły′ − y′ − 6y′ − !0y =).
27. y◂‾+ ′y′ + 0y′ + !8y′+ !4y =)..
28. y◂‾− ˌy′ − !y′ − !0y′ − !4y =).
29. y◂‾+ ˌy′ + 1y′ + ˌ2y+ !8y =).
30. y◂‾− ˌy′ − ˌy′ − !4y′ − !8y =).

2. Дослідіть на асимптотичну стійкість тривіальний розв'язок диференційного рівняння.

1. 7y′ + ły′ + ˌy′+ ˌy =).
2. 6y′ + ły′ + ˌy′+ ˌy =).
3. 4y′ + ˌy′ + ˌy′+ ˌy =).
4. 5y′ + ły′ + ′y′+ ˌy =).
5. 8y′ + ˌy′ + ˌy′+ !y =).
6. 4y′ + ′y′ + ły′+ ˌy =).
7. 2y′ + ′y′ + !y′+ ˌy =).
8. 5y′ + ły′ + ˌy′+ ˌy =).
9. y′ + ˌy′ + !y′+ 1y =).
10. 5y′ + ˌy′ +)y′+ ˌy =).
11. 2y′ + ˌy′ + ły′+ 2y =).
12. 3y′ + !y′ + 0y′+ ˌy =).
13. 3y′ + ˌy′ + ły′+ ′y =).
14. 5y′ + ˌy′ + ′y′+ ły =).
15. 6y′ + ′y′ + ły′+ ˌy =).
16. 6y′ + ˌy′ + ły′+ ˌy =).
17. 2y′ + ˌy′ + ˌy′+ ˌy =).
18. 5y′ + !y′ + ˌy′+ ˌy =).
19. 5y′ + ˌy′ + ˌy′+ ły =).
20. 7y′ + ˌy′ + ˌy′+ ˌy =).
21. 4y′ + ˌy′ + ˌy′+ ′y =).
22. 5y′ + 1y′ + y′+ !y =).
23. 7y′ + ły′ + ˌy′+ ły =).
24. 4y′ + 2y′ + !y′+ ˌy =).
25. 8y′ + ˌy′ + ˌy′+ ły =).
26. 3y′ + ły′ + ˌy′+ ′y =).
27. 3y′ + ˌy′ + ˌy′+)y =).
28. 4y′ + ˌy′ + ˌy′+ ′y =).
29. 2y′ + ˌy′ + ˌy′+ 0y =).
30. 3y′ + ′y′ + ˌy′+ 1y =).

3. Дослідіть на стійкість розв'язки системи диференційних рівнянь

$$\begin{cases} x' = -x + \alpha \ \ + \beta \ , \\ y' = -\alpha \ \ - y + \alpha \\ z' = -\beta \ \ - \alpha \ \ - z. \end{cases}$$

визначте характер стійкості.

1. $\alpha = ,\ \beta = .$ 2. $\alpha = - ,\ \beta = .$
3. $\alpha = ,\ \beta = 2.$ 4. $\alpha = - ,\ \beta = 2.$
5. $\alpha = ,\ \beta = 3.$ 6. $\alpha = - ,\ \beta = 3.$
7. $\alpha = ,\ \beta = 4.$ 8. $\alpha = - ,\ \beta = 4.$
9. $\alpha = ,\ \beta = 5.$ 10. $\alpha = - ,\ \beta = 5.$
11. $\alpha = 2,\ \beta = .$ 12. $\alpha = - ,\ \beta = .$
13. $\alpha = 2,\ \beta = 2.$ 14. $\alpha = - ,\ \beta = 2.$
15. $\alpha = 2,\ \beta = 3.$ 16. $\alpha = - ,\ \beta = 3.$
17. $\alpha = 2,\ \beta = 4.$ 18. $\alpha = - ,\ \beta = 4.$
19. $\alpha = 2,\ \beta = 5.$ 20. $\alpha = - ,\ \beta = 5.$
21. $\alpha = 3,\ \beta = .$ 22. $\alpha = - ,\ \beta = .$
23. $\alpha = 3,\ \beta = 2.$ 24. $\alpha = - ,\ \beta = 2.$
25. $\alpha = 3,\ \beta = 3.$ 26. $\alpha = - ,\ \beta = 3.$
27. $\alpha = 3,\ \beta = 4.$ 28. $\alpha = - ,\ \beta = 4.$
29. $\alpha = 3,\ \beta = 5.$ 30. $\alpha = - ,\ \beta = 5.$

4. Визначте характер і дослідіть на стійкість точку спокою $x = 0,\ y = 0$ системи

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y, \\ \dfrac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y, \end{cases},$$

якщо:

1. $a_{11} = 3,\quad a_{12} = ,\quad a_{21} = 2,\quad a_{22} = 4.$
2. $a_{11} = 4,\quad a_{12} = ,\quad a_{21} = - ,\quad a_{22} = 2.$
3. $a_{11} = ,\quad a_{12} = - ,\quad a_{21} = 2,\quad a_{22} = 3.$
4. $a_{11} = 3,\quad a_{12} = 3,\quad a_{21} = ,\quad a_{22} = .$
5. $a_{11} = 7,\quad a_{12} = 4,\quad a_{21} = - ,\quad a_{22} = 3.$
6. $a_{11} = 2,\quad a_{12} = ,\quad a_{21} = - ,\quad a_{22} = 4.$
7. $a_{11} = - ,\quad a_{12} = 3,\quad a_{21} = 3,\quad a_{22} = - .$
8. $a_{11} = - ,\quad a_{12} = - ,\quad a_{21} = 3,\quad a_{22} = .$
9. $a_{11} = 2,\quad a_{12} = - ,\quad a_{21} = ,\quad a_{22} = 2.$
10. $a_{11} = 2,\quad a_{12} = ,\quad a_{21} = 3,\quad a_{22} = 4.$
11. $a_{11} = - ,\quad a_{12} = - ,\quad a_{21} = ,\quad a_{22} = - .$
12. $a_{11} = 3,\quad a_{12} = - ,\quad a_{21} = 7,\quad a_{22} = - .$
13. $a_{11} = 2,\quad a_{12} = 4,\quad a_{21} = ,\quad a_{22} = 5.$
14. $a_{11} = 7,\quad a_{12} = 0,\quad a_{21} = - ,\quad a_{22} = .$

15. $a_{11} = ,\qquad a_{12} = 3,\qquad a_{21} = -,\qquad a_{22} = -.$

16. $a_{11} = ,\qquad a_{12} = ,\qquad a_{21} = ,\qquad a_{22} = .$

17. $a_{11} = ,\qquad a_{12} = -,\qquad a_{21} = ,\qquad a_{22} = .$

18. $a_{11} = -,\qquad a_{12} = -,\qquad a_{21} = ,\qquad a_{22} = .$

19. $a_{11} = -,\qquad a_{12} = ,\qquad a_{21} = ,\qquad a_{22} = -.$

20. $a_{11} = \qquad a_{12} = \qquad a_{21} = -\qquad a_{22} = $

21. $a_{11} = -,\qquad a_{12} = -,\qquad a_{21} = ,\qquad a_{22} = .$

22. $a_{11} = ,\qquad a_{12} = ,\qquad a_{21} = ,\qquad a_{22} = .$

23. $a_{11} = -,\qquad a_{12} = ,\qquad a_{21} = -,\qquad a_{22} = -.$

24. $a_{11} = -,\qquad a_{12} = ,\qquad a_{21} = -,\qquad a_{22} = -.$

25. $a_{11} = -,\qquad a_{12} = ,\qquad a_{21} = ,\qquad a_{22} = -.$

26. $a_{11} = ,\qquad a_{12} = -,\qquad a_{21} = ,\qquad a_{22} = -.$

27. $a_{11} = ,\qquad a_{12} = -,\qquad a_{21} = ,\qquad a_{22} = .$

28. $a_{11} = -,\qquad a_{12} = -,\qquad a_{21} = ,\qquad a_{22} = .$

29. $a_{11} = -,\qquad a_{12} = -,\qquad a_{21} = ,\qquad a_{22} = .$

30. $a_{11} = -,\qquad a_{12} = -,\qquad a_{21} = ,\qquad a_{22} = -.$

5. Визначте значення параметра p, для якого тривіальний розв'язок системи

$$\begin{cases} x' = p\,x + \alpha\,y, \\ y' = -x + \beta\,y \end{cases}$$

стійкий або асимптотично-стійкий.

1. $\alpha = ,\ \beta = .$
2. $\alpha = ,\ \beta = -.$
3. $\alpha = ,\ \beta = .$
4. $\alpha = ,\ \beta = -.$
5. $\alpha = 2,\ \beta = .$
6. $\alpha = ,\ \beta = -.$
7. $\alpha = 20,\ \beta = .$
8. $\alpha = 2,\ \beta = -.$
9. $\alpha = 0,\ \beta = .$
10. $\alpha = 20,\ \beta = -.$
11. $\alpha = ,\ \beta = .$
12. $\alpha = -,\ \beta = -.$
13. $\alpha = ,\ \beta = .$
14. $\alpha = ,\ \beta = -.$
15. $\alpha = 5,\ \beta = .$
16. $\alpha = ,\ \beta = -.$
17. $\alpha = 24,\ \beta = .$
18. $\alpha = ,\ \beta = -.$
19. $\alpha = 5,\ \beta = .$
20. $\alpha = 5,\ \beta = -.$
21. $\alpha = ,\ \beta = .$
22. $\alpha = -,\ \beta = -.$
23. $\alpha = 0,\ \beta = .$
24. $\alpha = -,\ \beta = -.$
25. $\alpha = 8,\ \beta = .$
26. $\alpha = ,\ \beta = -.$
27. $\alpha = 28,\ \beta = .$
28. $\alpha = ,\ \beta = -.$
29. $\alpha = 0,\ \beta = .$
30. $\alpha = 0,\ \beta = -.$

6. Знайдіть, при яких значеннях параметрів α та β розв'язки системи асимптотично стійкі чи стійкі?
Для системи

$$\begin{cases} x' = -k\,x + \alpha\, y, \\ y' = \beta \quad - k\,y. \end{cases}$$

1. $k = 1$. 2. $k = 2$. 3. $k = 3$. 4. $k = 4$. 5. $k = 5$. 6. $k = 6$.

Для системи

$$\begin{cases} x' = -k\,x + \dfrac{1}{\alpha}\, y, \\ y' = \beta \quad - k\,y. \end{cases}$$

7. $k = 1$. 8. $k = 2$. 9. $k = 3$. 10. $k = 4$. 11. $k = 5$. 12. $k = 6$.

Для системи

$$\begin{cases} x' = -k\,x + \dfrac{1}{\alpha}\, y, \\ y' = \beta \quad - k\,y. \end{cases}$$

13. $k = 1$. 14. $k = 2$. 15. $k = 3$. 16. $k = 4$. 17. $k = 5$. 18. $k = 6$.

Для системи

$$\begin{cases} x' = -k\,x + \dfrac{1}{\alpha \cdot \alpha}\, y, \\ y' = \beta \quad - k\,y. \end{cases}$$

19. $k = 1$. 20. $k = 2$. 21. $k = 3$. 22. $k = 4$. 23. $k = 5$. 24. $k = 6$.

Для системи

$$\begin{cases} x' = -k\,x - \dfrac{1}{\alpha}\, y, \\ y' = \beta\, x - k\,y. \end{cases}$$

25. $k = 1$. 26. $k = 2$. 27. $k = 3$. 28. $k = 4$. 29. $k = 5$. 30. $k = 6$.

4 ЗАСТОСУВАННЯ ОПЕРАЦІЙНОГО ЧИСЛЕННЯ В ТЕОРІЇ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

4.1 Перетворення Лапласа. Основні поняття

Функція $f(t)$ називається оригіналом (за Лапласом), якщо вона задовольняє таким умовам:

1. є кусково-неперервною разом зі своєю похідною,
2. $f(t) = 0$, при $t < 0$,
3. $\exists\ M,\ s_0 : |f(t)| < Me^{s_0 t}$.

Функція $F(p)$ називається перетворенням (за Лапласом) функції $f(t)$, якщо

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t)dt .$$

Такий інтегральний оператор називається оператором Лапласа. Позначається:

$$f(t) \div F(p),\ F(p) \div f(t) .$$

Одиничною функцією Хевісайда $\eta(t)$ називається функція

$$\eta(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$

4.2 Елементарні властивості оператора Лапласа

1. Адитивність. Якщо

$$f_1(t) \div F_1(p),\ f_2(t) \div F_2(p),$$

то

$$f_1(t) + f_2(t) \div F_1(p) + F_2(p) .$$

2. Однорідність. Якщо

$$f(t) \div F(p),$$

то

$$Cf(t) \div CF(p),\ C \in R.$$

3.Подібність. Якщо

$$f(t) \div F(p),$$

то

$$f(at) \div \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right),\ a > 0.$$

4. Зміщення. Якщо

$$f(t) \div F(p),$$

то

$$e^{-\alpha t} f(t) \div F(p+\alpha).$$

5. Запізнення. Якщо

$$f(t) \div F(p),$$

то

$$f(t-t_0) \div e^{-pt_0} F(p).$$

Доведення властивостей 1-5 базується на означенні перетворення.

За допомогою означення та наведених властивостей можна знайти зображення деяких елементарних функцій.

1. $\eta(t) \div \dfrac{1}{p}$,

2. $e^{\alpha t} \div \dfrac{1}{p-\alpha}$,

3. $\sin \omega t \div \dfrac{\omega}{p^2 + \omega^2}$,

4. $cops\,\omega t \div \dfrac{p}{p^2 + \omega^2}$,

5. $sh\omega t \div \dfrac{\omega}{p^2 - \omega^2}$,

6. $ch\omega t \div \dfrac{p}{p^2 - \omega^2}$,

7. $t^n \div \dfrac{n!}{p^{n+1}}$.

Приклад 4.1 Знайти зображення $t^2 e^{3t}$

Розв'язання. Користуючись властивістю зміщення та формулою п.7, маємо

$$t^2 \div \frac{2!}{p^{2+1}},$$

$$t^2 e^{3t} \div \frac{2}{(p-3)^3}.$$

4.3 Основні властивості перетворення Лапласа

1. Диференціювання оригіналу. Якщо

$$f(t) \div F(p),$$

то

$$f'(t) \div pF(p) - f(0),$$

$$f^{(n)}(t) \div p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0).$$

2. Диференціювання зображення. Якщо

$$f(t) \div F(p),$$

то

$$tf(t) \div -\frac{dF(p)}{dp},$$

$$t^k f(t) \div (-1)^k \frac{d^k F(p)}{dp^k}.$$

3. Інтегрування оригіналу. Якщо

$$f(t) \div F(p),$$

то

$$\int_0^t f(t)dt \div \frac{F(p)}{p}.$$

4. Інтегрування зображення. Якщо

$$f(t) \div F(p),$$

то

$$\frac{f(t)}{t} \div \int_p^{\infty} F(p)dp.$$

Приклад 4.2 Знайти зображення $t^2 \cos^{3t}$

Розв’язання. Користуючись властивістю диференціювання зображення та формулою зображення $\cos\omega$, маємо

$$\cos 3t \div \frac{p}{p^2+9},$$

$$t^2 \cos 3t \div (-1)^2 \frac{d^2}{dp^2}\left(\frac{p}{p^2+9}\right),$$

$$t^2 \cos 3t \div \frac{2p^3-54p}{\left(p^2+9\right)^3}.$$

Приклад 4.3 Знайти зображення $\int\limits_0^x \frac{1-\cos 3t}{t}dt$

Розв'язання. Користуючись властивістю інтегрування зображення та формулою зображення $\cos\omega$, маємо

$$1-\cos 3t \div \frac{1}{p}-\frac{p}{p^2+9},$$

$$\frac{1-\cos 3t}{t} \div \int\limits_0^x \left(\frac{1}{p}-\frac{p}{p^2+9}\right)dp = \ln\frac{\sqrt{p^2+9}}{p},$$

$$\int\limits_0^x \frac{1-\cos 3t}{t}dt \div \frac{\ln\frac{1}{p}\sqrt{p^2+9}}{p}.$$

Завдання для самостійної роботи. Знайти зображення функцій

$$(t-2)^2\eta(t-2),\ e^{4t}t\cos^2 5t.$$

4.4 Застосування перетворення Лапласа до розв'язування диференціальних рівнянь

Нехай маємо диференціальне рівняння

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}y'+a_ny=f(x)$$

з початковими умовами

$$y(0)=y_0,\ y'(0)=y_0',\ \ldots,\ y^{(n-1)}(0)=y_0^{(n-1)},$$

і нехай

$$y(t)\div Y(p),\ f(t)\div F(p).$$

Тоді, використовуючи властивість диференціювання оригіналу, маємо

$$p^nY(p)-p^{n-1}y(0)-p^{n-2}y'(0)-\ldots-y^{(n-1)}(0)+$$

$$\ldots + a_{n-1}(pY(p) - y(0)) + a_n Y(p) = F(p).$$

Отримаємо звичайне алгебраїчне рівняння, з якого можна знайти функцію $Y(p)$ і відновити за нею оригінал $y(t)$.

Аналогічним способом розв'язуються системи диференціальних рівнянь.

Приклад 4.4 За допомогою операційного числення розв'язати диференціальне рівняння

$$y'' - 3y' + 2y = 12e^{3t},\ y(0) = 2,\ y'(0) = 6.$$

Розв'язання. Нехай

$$y(t) \div Y(p).$$

Користуючись властивістю диференціювання оригіналу, маємо

$$p^2Y(p) - 2p - 6 - 3(pY(p) - 2) + 2Y(p) = \frac{12}{p-3}.$$

Звідки

$$Y(p) = \frac{2p^2 - 6p + 12}{(p-3)(p^2 - 3p + 2)}.$$

Представимо дріб у вигляді суми найпростіших дробів

$$Y(p) = \frac{6}{p-3} + \frac{4}{p-1} + \frac{-8}{p-2}.$$

Знаходимо оригінал цієї функції

$$y(t) = 6e^{3t} + 4e^{t} - 8e^{2t}.$$

Приклад 4.5 За допомогою операційного числення розв'язати систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} x' + x = y + e^t \\ y' + y = x + e^t \end{cases}, \; x(0) = \;\;, \; y(0) = \;\;.$$

Розв'язання. Нехай

$$x(t) \div X(p), y(t) \div Y(p).$$

Тоді

$$\begin{cases} pX(p) - 1 + X(p) = Y(p) + \dfrac{1}{p-1} \\ pY(p) - 1 + Y(p) = X(p) + \dfrac{1}{p-1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} X(p) = \dfrac{1}{p-1} \\ Y(p) = \dfrac{1}{p-1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(t) = e^t \\ y(t) = e^t \end{cases}$$

Завдання для самостійної роботи.

1. Розв'язати рівняння за допомогою операційного числення

$$x' + 2x = \sin t, \; x(0) = 0.$$

2. Розв'язати систему диференціальних рівнянь за допомогою операційного числення

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x + 4y - 1 \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + 3y + 2, \end{cases} \; x(0) = y(0) = 0.$$

Індивідуальні вправи.

1. Розв'язати систему диференціальних рівнянь з початковими умовами $x(0) = y(0) = 0$ за допомогою операційного числення

1. $\begin{cases} \dot{x} = 4x + 3y + t, \\ \dot{y} = -2x - y. \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dot{x} = x - 2y + e^t, \\ \dot{y} = x + 4y + 1. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dot{x} = x - y + \cos 3t, \\ \dot{y} = x - 3y. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dot{x} = x - y + t^2 - 1, \\ \dot{y} = 5x + 5y - 2. \end{cases}$

5. $\begin{cases} \dot{x} = x - 3y + \sin t, \\ \dot{y} = x + 5y - \cos t. \end{cases}$

6. $\begin{cases} \dot{x} = -3x + 6y + 2t, \\ \dot{y} = -x + 4y - t. \end{cases}$

7. $\begin{cases} \dot{x} = -6x - 4y + t, \\ \dot{y} = 3x + 2y - 5. \end{cases}$

8. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y + t - 2, \\ \dot{y} = 3x + 4y + 3. \end{cases}$

9. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 2y - \sin 2t, \\ \dot{y} = x + 3y. \end{cases}$

10. $\begin{cases} \dot{x} = -2x - 5y + e^t, \\ \dot{y} = x + 4y + 2. \end{cases}$

11. $\begin{cases} \dot{x} = 4x - 5y + e^{2t}, \\ \dot{y} = 2x - 2y. \end{cases}$

12. $\begin{cases} \dot{x} = x - y - e^{-t}, \\ \dot{y} = 2x + 3y + 2e^{-t}. \end{cases}$

13. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 5y, \\ \dot{y} = 2y + \sin t. \end{cases}$

14. $\begin{cases} \dot{x} = -x + 4y, \\ \dot{y} = x + 2y + e^t. \end{cases}$

15. $\begin{cases} \dot{x} = 4x - y + e^t, \\ \dot{y} = x + 2y + 2e^t. \end{cases}$

16. $\begin{cases} \dot{x} = -2x + 5y + 3, \\ \dot{y} = -x + 2y - 4. \end{cases}$

17. $\begin{cases} \dot{x} = -2x - 2y - \cos t, \\ \dot{y} = 4x + 2y + 2. \end{cases}$

18. $\begin{cases} \dot{x} = x + 2y - 2t, \\ \dot{y} = -5x - y + 3t. \end{cases}$

19. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - 4y + e^{-2t}, \\ \dot{y} = 5x - 2y + 4. \end{cases}$

20. $\begin{cases} \dot{x} = 6x + 8y + e^{2t}, \\ \dot{y} = -2x - 2y - 3e^{2t}. \end{cases}$

21. $\begin{cases} \dot{x} = x - y - t - 2, \\ \dot{y} = 2x + 3y + 2t. \end{cases}$

22. $\begin{cases} \dot{x} = -3x + 4y + e^t, \\ \dot{y} = -5x + 5y + 3e^t. \end{cases}$

23. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 3y + \sin t, \\ \dot{y} = -3x + 2y + \cos t. \end{cases}$

24. $\begin{cases} \dot{x} = -6x - y + e^{-t}, \\ \dot{y} = 17x + 2y - e^{-t}. \end{cases}$

25. $\begin{cases} \dot{x} = -5x + 5y + t^2, \\ \dot{y} = -5x + y + t - 4. \end{cases}$

26. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 2y + t^2, \\ \dot{y} = -2x - 3y. \end{cases}$

27. $\begin{cases} \dot{x} = -x - 2y + e^t, \\ \dot{y} = x - 3y + t. \end{cases}$

28. $\begin{cases} \dot{x} = -3x - 2y + e^{-t}, \\ \dot{y} = 2x + y. \end{cases}$

29. $\begin{cases} \dot{x} = -3x - y - e^{-2t}, \\ \dot{y} = x - y + 1. \end{cases}$

30. $\begin{cases} \dot{x} = 3x + 17y + t^2, \\ \dot{y} = -2x - 3y - t. \end{cases}$

2. Розв’яжіть методом операційного числення систему однорідних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y, \\ \dfrac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y, \end{cases}, \quad x(0) = y(0) = \text{[illegible]},$$

якщо :

1. $a_{11} =$ [illegible], $a_{12} =$ [illegible], $a_{21} =$ [illegible], $a_{22} =$ [illegible].
2. $a_{11} =$ [illegible], $a_{12} =$ [illegible], $a_{21} = -$[illegible], $a_{22} =$ [illegible].
3. $a_{11} =$ [illegible], $a_{12} = -$[illegible], $a_{21} =$ [illegible], $a_{22} =$ [illegible].
4. $a_{11} =$ [illegible], $a_{12} =$ [illegible], $a_{21} =$ [illegible], $a_{22} =$ [illegible].
5. $a_{11} =$ [illegible], $a_{12} =$ [illegible], $a_{21} = -$[illegible], $a_{22} =$ [illegible].
6. $a_{11} =$ [illegible], $a_{12} =$ [illegible], $a_{21} = -$[illegible], $a_{22} =$ [illegible].
7. $a_{11} = -$[illegible], $a_{12} =$ [illegible], $a_{21} =$ [illegible], $a_{22} = -$[illegible].
8. $a_{11} = -$[illegible], $a_{12} = -$[illegible], $a_{21} =$ [illegible], $a_{22} =$ [illegible].
9. $a_{11} =$ [illegible], $a_{12} = -$[illegible], $a_{21} =$ [illegible], $a_{22} =$ [illegible].
10. $a_{11} =$ [illegible], $a_{12} =$ [illegible], $a_{21} =$ [illegible], $a_{22} =$ [illegible].
11. $a_{11} = -$[illegible], $a_{12} = -$[illegible], $a_{21} =$ [illegible], $a_{22} = -$[illegible].
12. $a_{11} =$ [illegible], $a_{12} = -$[illegible], $a_{21} = 7$, $a_{22} = -$[illegible].
13. $a_{11} =$ [illegible], $a_{12} =$ [illegible], $a_{21} =$ [illegible], $a_{22} =$ [illegible].
14. $a_{11} =$ [illegible], $a_{12} =$ [illegible], $a_{21} = -$[illegible], $a_{22} =$ [illegible].
15. $a_{11} =$ [illegible], $a_{12} = 3$, $a_{21} = -$[illegible], $a_{22} = -$[illegible].
16. $a_{11} =$ [illegible], $a_{12} =$ [illegible], $a_{21} =$ [illegible], $a_{22} =$ [illegible].
17. $a_{11} =$ [illegible], $a_{12} = -$[illegible], $a_{21} =$ [illegible], $a_{22} =$ [illegible].
18. $a_{11} = -$[illegible], $a_{12} = -$[illegible], $a_{21} =$ [illegible], $a_{22} =$ [illegible].
19. $a_{11} = -$[illegible], $a_{12} =$ [illegible], $a_{21} =$ [illegible], $a_{22} = -$[illegible].
20. $a_{11} =$ [illegible], $a_{12} =$ [illegible], $a_{21} = -$[illegible], $a_{22} =$ [illegible].
21. $a_{11} = -$[illegible], $a_{12} = -$[illegible], $a_{21} =$ [illegible], $a_{22} =$ [illegible].
22. $a_{11} =$ [illegible], $a_{12} =$ [illegible], $a_{21} =$ [illegible], $a_{22} =$ [illegible].
23. $a_{11} = -$[illegible], $a_{12} =$ [illegible], $a_{21} = -$[illegible], $a_{22} = -$[illegible].
24. $a_{11} = -$[illegible], $a_{12} =$ [illegible], $a_{21} = -$[illegible], $a_{22} = -$[illegible].
25. $a_{11} = -$[illegible], $a_{12} =$ [illegible], $a_{21} =$ [illegible], $a_{22} = -$[illegible].
26. $a_{11} =$ [illegible], $a_{12} = -$[illegible], $a_{21} =$ [illegible], $a_{22} = -$[illegible].
27. $a_{11} =$ [illegible], $a_{12} = -$[illegible], $a_{21} =$ [illegible], $a_{22} =$ [illegible].
28. $a_{11} = -$[illegible], $a_{12} = -$[illegible], $a_{21} =$ [illegible], $a_{22} =$ [illegible].
29. $a_{11} = -$[illegible], $a_{12} = -$[illegible], $a_{21} =$ [illegible], $a_{22} =$ [illegible].
30. $a_{11} = -$[illegible], $a_{12} = -$[illegible], $a_{21} =$ [illegible], $a_{22} = -$[illegible].

5 ЗАВДАННЯ ДОСЛІДНИЦЬКОГО ХАРАКТЕРУ

Приклад 5.1 Для заданого диференціального рівняння

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-x-3y}{2x+8y}$$

виконати такі дії:

1.Аргументовано визначити порядок та тип рівняння.

2. Знайти загальний інтеграл рівняння. Використовуючи комп'ютерні пакети побудувати інтегральні лінії для різних значень константи C.

3. Вказати особливі точки рівняння, дослідити їх тип.

Розв'язання.

1.Рівняння містить тільки похідну $\frac{dy}{dx}$, отже, це рівняння першого порядку. Оскільки права частина рівняння

$$f(tx,ty)=\frac{-tx-3ty}{2tx+8ty}=f(x,y)$$

є однорідною функцією, це однорідне рівняння.

2. Виконаємо заміну $y=ux$, $y'=u'x+u$. Маємо

$$u'x+u=\frac{-x-3ux}{2x+8ux},$$

$$u'x=\frac{-8u^2-5u-1}{8u+2}$$

$$\int\frac{8u+2}{8u^2+5u+1}du=-\int\frac{dx}{x},$$

$$\frac{1}{2}\int\frac{16u+5}{8u^2+5u+1}du-\frac{1}{2}\int\frac{du}{8u^2+5u+1}=-\int\frac{dx}{x},$$

$$\frac{1}{2}\int\frac{16u+5}{8u^2+5u+1}du-16\int\frac{du}{(16u+5)^2+7}=-\int\frac{dx}{x},$$

$$\frac{1}{2}\ln|8u^2+5u+1|-\frac{1}{\sqrt{7}}arctg\frac{16u+5}{\sqrt{7}}+\ln C=-\ln|x|$$

$$\ln Cx\sqrt{8\left(\frac{y}{x}\right)^2+5\frac{y}{x}+1}=\frac{1}{\sqrt{7}}arctg\frac{16\frac{y}{x}+5}{\sqrt{7}}$$

$$\ln C\sqrt{8y^2+5yx+x^2}=\frac{1}{\sqrt{7}}arctg\frac{16\frac{y}{x}+5}{\sqrt{7}}.$$

Побудуємо декілька інтегральних ліній (рис. 5.1)

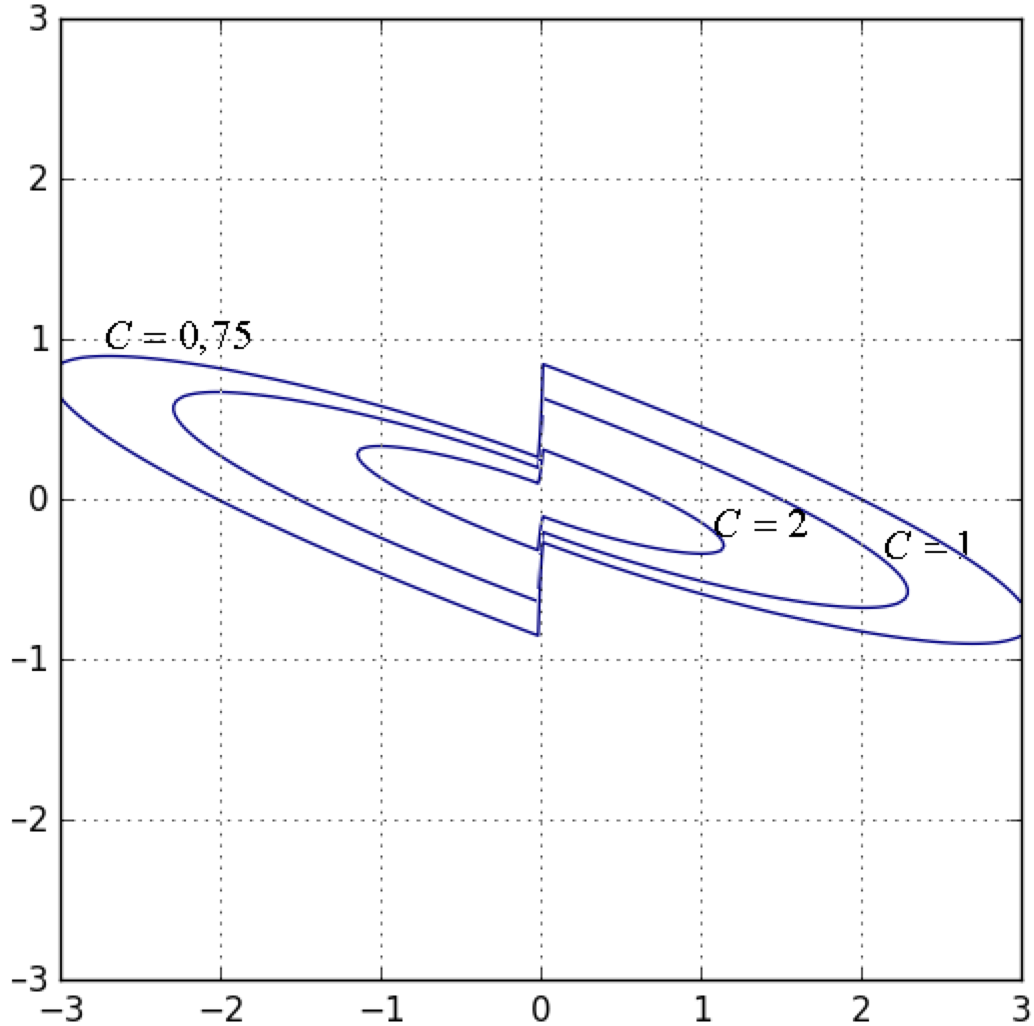

Рисунок 5.1

2. Розв’язуючи систему рівнянь

$$\begin{cases} -x-3y=0 \\ 2x+8y=0 \end{cases}$$

приходимо до висновку, що точка (0;0) є особливою точкою диференціального рівняння. Встановимо її тип. Для цього складемо характеристичне рівняння у вигляді визначника другого порядку

$$\begin{vmatrix} -1-k & -3 \\ 2 & 8-k \end{vmatrix}=0.$$

Розв’язуючи це рівняння, знаходимо

$$k_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{7}}{2} i$$

Отже, дійсні частини коренів характеристичного рівняння від’ємні, значить особлива точка (точка спокою) є асимптотично стійкою (фокус).

Завдання для самостійної роботи.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x+3y}{x-y},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-9x+y}{4y-x},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{-2x-5y}.$$

Приклад 5.2. Для системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} x' = 2x + 8\sin y \\ y' = 2 - e^{x} - 3y - \cos y \end{cases}$$

виконати такі дії:

1. Встановити порядок і тип системи.

2. Користуючись розвиненням елементарних функцій в степеневі ряди, скласти систему першого наближення.

3. Дослідити характер точки спокою системи першого наближення. Зробити висновок про характер стійкості особливого розв’язку вихідної системи.

Розв’язання.

1. Система з двох диференціальних рівнянь першого порядку. Система є нелінійною.

2. Користуючись відомими розвиненнями

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots,$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots,$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots,$$

запишемо систему першого наближення

$$\begin{cases} x' = 2x + 8y \\ y' = -x - 3y \end{cases}$$

3. Запишемо характеристичне рівняння системи

$$\begin{vmatrix} - \;\; -k & -3 \\ 2 & 8-k \end{vmatrix} = 0.$$

Розв’язуючи це рівняння, знаходимо

$$k_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{7}}{2} i$$

Отже, особливий розв’язок системи першого наближення є асимптотично стійким. В цьому випадку можливе дослідження за допомогою системи першого наближення.

Завдання для самостійної роботи.

$$\begin{cases} x' = 2e^x + 5y - 2 + x^4 \\ y' = x + 6\cos y - 6 - y^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = x - 2\sin y - y^3 \sin x \\ y' = 2y - 3x - x^3 \end{cases}$$

Приклад 5.3. Знайти закон, за яким змінюється заряд у ланцюгу $C - R$, якщо електрорушійна сила змінюється за законом, зображеному на рис. 5.2. Відомо, що $q(0) = 0$. Результат пояснити графічно.

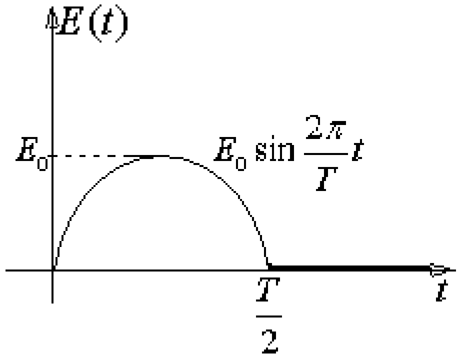

Рисунок 5.2.

Розв'язання.

Запишемо закон Кірхгофа

$$LI' + RI + \frac{q}{C} = E(t).$$

Оскільки $L = 0$, то

$$RI + \frac{q}{C} = E(t),\ I(t) = q'(t).$$

Отримаємо диференціальне рівняння першого порядку

$$Rq' + \frac{q}{C} = E(t),\ q(0) = 0.$$

Нехай

$$q(t) \div Q(p),$$

тоді

$$q'(t) \div pQ(p) - q(0) = pQ(p).$$

Складемо аналітичний вираз для правої частини рівняння.

$$E(t) = E_0 \sin\frac{2\pi}{T}t\eta(t) + (-E_0 \sin\frac{2\pi}{T}t)\eta(t - \frac{T}{2}) =$$

$$= E_0 \sin\frac{2\pi}{T}t\eta(t) - E_0 \sin(\frac{2\pi}{T}(t - \frac{T}{2}) + \pi)\eta(t - \frac{T}{2}) =$$

$$= E_0 \sin\frac{2\pi}{T}t\,\eta(t) + E_0 \sin\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{T}{2}\right)\eta\left(t-\frac{T}{2}\right) \div$$

$$\div\ E_0 \frac{\frac{2\pi}{T}}{p^2+\frac{4\pi}{T^2}} + E_0 \frac{\frac{2\pi}{T}}{p^2+\frac{4\pi}{T^2}} e^{-\frac{T}{2}p}$$

Маємо алгебраїчне рівняння

$$RpQ(p) + \frac{Q(p)}{C} = E_0 \frac{\frac{2\pi}{T}}{p^2+\frac{4\pi}{T^2}} + E_0 \frac{\frac{2\pi}{T}}{p^2+\frac{4\pi}{T^2}} e^{-\frac{T}{2}p}$$

Розв’яжемо отримане рівняння відносно $Q(p)$

$$Q(p) = E_0 \frac{2\pi}{T}\frac{1}{Rp+\frac{1}{C}}\frac{1}{p^2+\frac{4\pi}{T^2}} + E_0 \frac{2\pi}{T}\frac{1}{Rp+\frac{1}{C}}\frac{1}{p^2+\frac{4\pi}{T^2}} e^{-\frac{T}{2}p} =$$

$$= E_0 \frac{2\pi}{T}\frac{1}{R}\left[\frac{T^2R^2C^2}{T^2+4\pi R^2C^2}\frac{1}{p+\frac{1}{RC}} + \frac{\frac{-T^2R^2C^2}{T^2+4\pi R^2C^2}p + \frac{T^2RC}{T^2+4\pi R^2C^2}}{p^2+\frac{4\pi}{T^2}}\right] +$$

$$+ E_0 \frac{2\pi}{T}\frac{1}{R}\left[\frac{T^2R^2C^2}{T^2+4\pi R^2C^2}\frac{1}{p+\frac{1}{RC}} + \frac{\frac{-T^2R^2C^2}{T^2+4\pi R^2C^2}p + \frac{T^2RC}{T^2+4\pi R^2C^2}}{p^2+\frac{4\pi}{T^2}}\right] e^{-\frac{T}{2}p}$$

Перейдемо до оригіналу $q(t)$

$$q(t) = E_0 \frac{2\pi}{T}\frac{1}{R}\left[\frac{T^2R^2C^2}{T^2+4\pi R^2C^2} e^{-\frac{1}{RC}t} -\right.$$

$$\left. - \frac{T^2R^2C^2}{T^2+4\pi R^2C^2}\cos\frac{2\pi}{T}t + \frac{T^2R^2C^2}{T^2+4\pi R^2C^2}\frac{T}{2\pi}\sin\frac{2\pi}{T}t\right]\eta(t) +$$

$$+ E_0 \frac{2\pi}{T}\frac{1}{R}\left[\frac{T^2R^2C^2}{T^2+4\pi R^2C^2} e^{-\frac{1}{RC}\left(t-\frac{T}{2}\right)} -\right.$$

$$\left. - \frac{T^2R^2C^2}{T^2+4\pi R^2C^2}\cos\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{T}{2}\right) + \frac{T^2R^2C^2}{T^2+4\pi R^2C^2}\frac{T}{2\pi}\sin\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{T}{2}\right)\right]\eta\left(t-\frac{T}{2}\right).$$

Побудуємо графік закону, за яким накопичується заряд на конденсаторі (рис. 5.3)

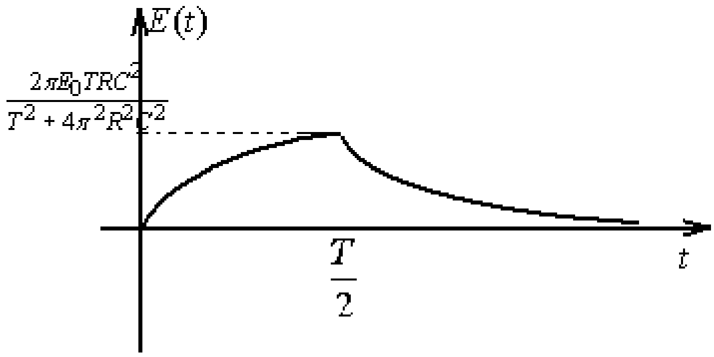

Рисунок 5.3

Виконаємо аналіз результату

При $t \in \left(0;\frac{T}{2}\right)$ функція $\eta(t)=1$, $\eta\left(t-\frac{T}{2}\right)=0$, значить

$$q(t)=\frac{2\pi E_0TRC^2}{T^2+4\pi^2R^2C^2}e^{-\frac{1}{RC}t}-\frac{2\pi E_0TRC^2}{T^2+4\pi^2R^2C^2}\cos\frac{2\pi}{T}t+\frac{E_0T^2C}{T^2+4\pi^2R^2C^2}\sin\frac{2\pi}{T}t.$$

При $t \in \left(\frac{T}{2};\infty\right)$ функція $\eta(t)=1$, $\eta\left(t-\frac{T}{2}\right)=1$, значить

$$q(t)=\frac{2\pi E_0TRC^2}{T^2+4\pi^2R^2C^2}e^{-\frac{1}{RC}t}-\frac{2\pi E_0TRC^2}{T^2+4\pi^2R^2C^2}e^{-\frac{t-\frac{T}{2}}{RC}}$$

Завдання для самостійної роботи.

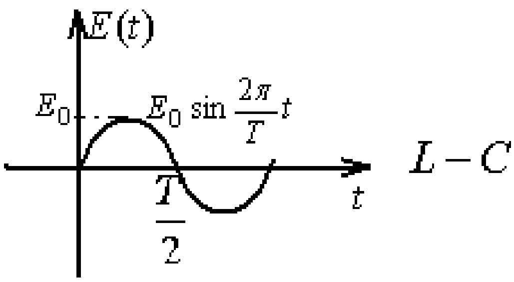

Рисунок 5.4

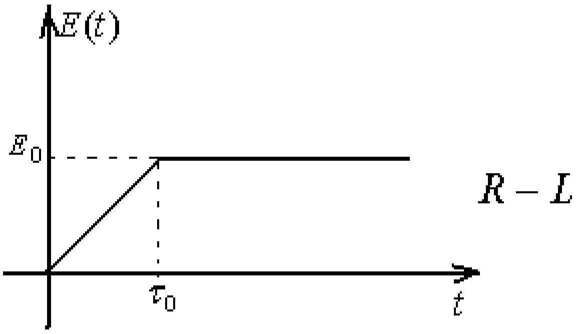

Рисунок 5.5

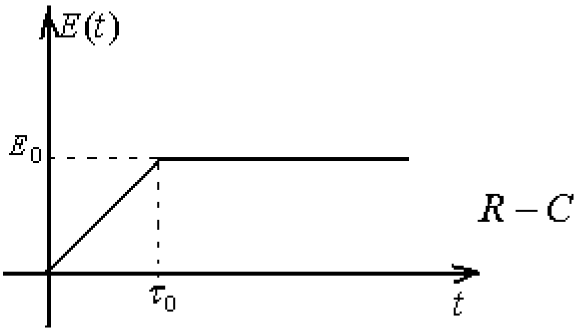

Рисунок 5.6

Приклад 5.4 Деякий фізичний процес може бути заданим за допомогою рівняння

$$y' + \alpha y = f(t),\ y(0) = 0$$

де графік функції $f(t)$ зображено на рис. 5.7. Знайти значення t_2 в залежності від параметрів α, h, h_1, t_1 за яких $y(t) \equiv 0$ при $t > t_2$.

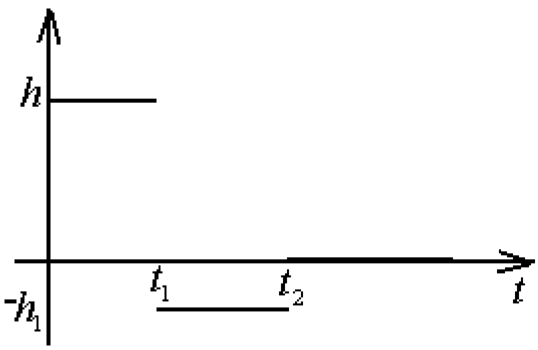

Рисунок 5.7

Розв'язання.

Запишемо аналітичний вираз для функції $f(t)$

$$f(t) = h\eta(t) - (h_1 + h)\eta(t - t_1) + h_1\eta(t - t_2).$$

Знайдемо зображення

$$F(p) = h\frac{1}{p} - (h_1 + h)\frac{1}{p}e^{-t_1 p} + h_1\frac{1}{p}e^{-t_2 p}.$$

Нехай

$$y(t) \div Y(p),\ y'(t) \div pY(p).$$

Запишемо відповідне алгебраїчне рівняння для зображень

$$pY(p) + \alpha Y(p) = h\frac{1}{p} - (h_1 + h)\frac{1}{p}e^{-t_1 p} + h_1\frac{1}{p}e^{-t_2 p}.$$

Знайдемо $Y(p)$

$$Y(p) = h\frac{1}{p(p+\alpha)} - (h_1 + h)\frac{1}{p(p+\alpha)}e^{-t_1 p} + h_1\frac{1}{p(p+\alpha)}e^{-t_2 p}.$$

Можемо знайти оригінал розв'язку

$$y(t) = \frac{h}{\alpha}(1 - e^{-\alpha t})\eta(t) - \frac{h_1 + h}{\alpha}(1 - e^{-\alpha(t - t_1)})\eta(t - t_1) +$$
$$+ \frac{h_1}{\alpha}(1 - e^{-\alpha(t - t_2)})\eta(t - t_2)$$

При $t > t_2$, $\eta(t) = 1$, $\eta(t - t_1) = 1$, $\eta(t - t_2) = 1$. Отже

$$y(t) = \frac{h}{\alpha}(1 - e^{-\alpha t}) - \frac{h_1 + h}{\alpha}(1 - e^{-\alpha(t - t_1)}) + \frac{h_1}{\alpha}(1 - e^{-\alpha(t - t_2)}) \equiv 0$$

Звідси

$$t_2 = \frac{1}{\alpha}\ln\left|\frac{-h + (h + h_1)e^{\alpha t_1}}{h_1}\right|.$$

Завдання для самостійної роботи.

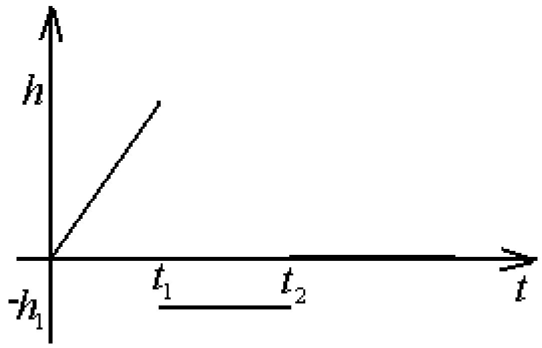

Рисунок 5.8

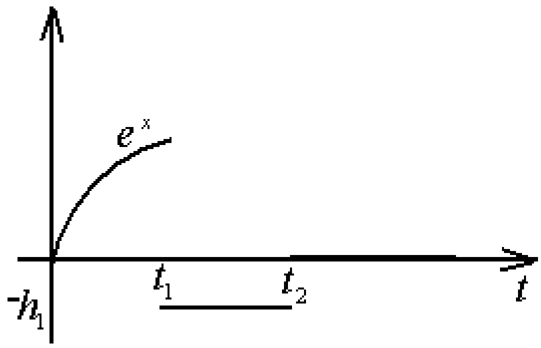

Рисунок 5.9

ЛІТЕРАТУРА

1. Перестюк М. О., Маринець В. В. Теорія рівнянь математичної фізики: Навч. посібник. – К. : Либідь, 2001. – 336 с.

2. Петровский И. Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. – М. : Изд-во МГУ, 1984. – 422 с.

3. Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М. : Наука, 1982. – 290 с.

4. Степанов И. А. Лекции по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М. : Наука, 1975. – 324 с.

5. Шкіль М. І. Вища математика: Підручник: У 3 кн.: Кн. II. Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної. Ряди. – К. : Либідь, 1994. – 352 с.

Навчальне видання

РОВЕНСЬКА Ольга Геннадіївна,
КОЛЕСНИКОВ Сергій Олексійович

ВИБРАНІ ПИТАННЯ КУРСУ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Навчальний посібник
для студентів спеціальності «Системний аналіз»

Редактор І.І.Дьякова
Комп'ютерна верстка О.С.Орда

120/2009. Підп. до друку . Формат 60 x 84/16.
Папір офсетний. Ум. друк. арк. Обл.-вид. арк.
Тираж прим. Зам. №

Видавець і виготівник
«Донбаська державна машинобудівна академія»
84313, м. Краматорськ, вул. Шкадінова, 72.
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до Державного реєстру
серія ДК №1633 від 24.12.03.